

一、离散 \implies 离散

1. X 的分布为:

X	-2	-1	0	1	2	3
P	0.05	0.15	0.20	0.25	0.20	0.15

求 $Y = 2X + 1, Z = X^2$ 的概率分布.

二、连续 \implies 连续

2. 设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 < x < 0 \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq x < 2 \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$, 令 $Y = X^2$, 求 Y 的概率密度

$f_Y(y)$;

三、连续 \implies 混合

3. 设一设备开机后无故障工作时间 X 服从指数分布, 平均无故障工作时间为 5 小时, 设备定时开机, 出现故障自动关机, 而在无故障工作的情况下工作 2 小时便关机. 试求设备每次开机无故障工作时间 Y 的分布函数.

四、连续 \implies 离散

4. 设随机变量 X 服从均值为 $\frac{1}{\lambda}$ 的指数分布, 验证随机变量 $Y = [X] + 1$ 服从参数为 $1 - e^{-\lambda}$ 的几何分布.

五、(离, 离) \implies 离

(一) $(X, Y) \sim p_{ij}$

5. 袋中有编号为 1, 1, 2, 3 的四个球, 现从中无放回地取两次, 每次取一个, 设 X_1, X_2 分别为第一次第二次取到的球的号码, 求随机变量 $Y = X_1 X_2$ 的分布.

(二) $X \sim p_k, Y \sim q_k,$

6. 设 X 与 Y 是独立同分布的随机变量, 均服从参数为 p 的几何分布, 求 $Z = \max\{X, Y\}$ 的概率分布.

7. 假设随机变量 X 与 Y 相互独立且 $Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$, 如果 X 服从参数为 λ 的泊松分布, 求 $Z = XY$ 的概率分布;

六、(连, 连) \implies 连

(一) 分布函数法

8. 设二维随机变量 (X, Y) 在矩形区域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$ 上服从均匀分布, 求边长为 X 和 Y 的矩形面积 Z 的概率密度.

(二) 卷积公式法

9. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 - x - y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求 $Z = X + Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

(三) 最值函数

10. 设二维随机变量 (X, Y) 的联合概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} 6e^{-2x-3y}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

令 $Z = \max\{X, Y\}$. 求 Z 的分布函数.

七、(离, 连) \implies 连

(一) X, Y 独立

11. 假设随机变量 X 与 Y 相互独立且 $Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$, 如果 X 服从标准正态分布, 求 $Z = XY$ 的概率密度.

(二) X, Y 不独立

12. 设二维随机变量 (X, Y) 在区域 $D = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, x^2 < y < \sqrt{x}\}$ 上服从均匀分布, 令

$$U = \begin{cases} 1, & X \leq Y, \\ 0, & X > Y. \end{cases}$$

求 $Z = U + X$ 的分布函数 $F_Z(z)$.

八、?? \implies (离, 离)

13. 已知随机变量 X 与 Y 相互独立, $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$, Y 服从参数为 1 的指数分布, 记:

$$U = \begin{cases} 0, & X < Y, \\ 1, & X \geq Y, \end{cases} \quad V = \begin{cases} 0, & X < 2Y \\ 1, & X \geq 2Y \end{cases}$$

求 (U, V) 的联合分布.