2009 年全国硕士研究生招生考试

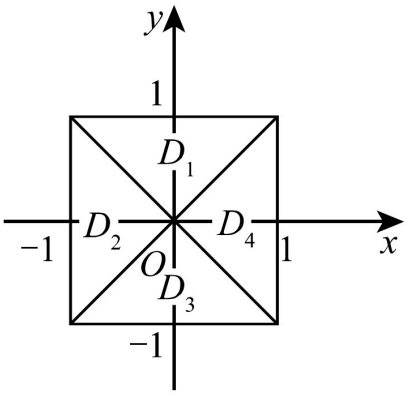
一、选择题

(1) 当 $x \to 0$ 时, $f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1 - bx)$ 是等价无穷小量, 则_____

A. $a = 1, b = -\dfrac{1}{6}$　　B. $a = 1, b = \dfrac{1}{6}$

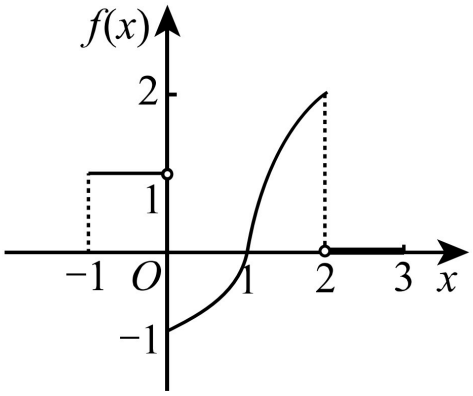
C. $a = -1, b = -\dfrac{1}{6}$　　D. $a = -1, b = \dfrac{1}{6}$

(2) 如图, 正方形 $\{(x,y)||x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1$, 被其对角线划分为四个区域 $D_k (k = 1,2,3,4), I_k = \iint_{D_k} y\cos x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 则 $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant 4} \{I_k\} =$_____

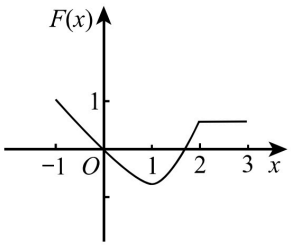


A. I_1　　B. I_2　　C. I_3　　D. I_4

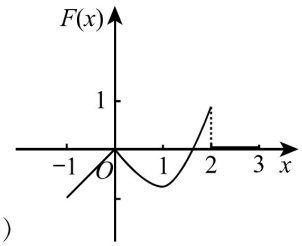
(3) 设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的图形如右图所示, 则函数 $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 的图形为_____



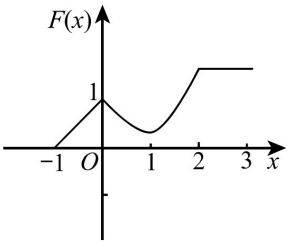
(A)



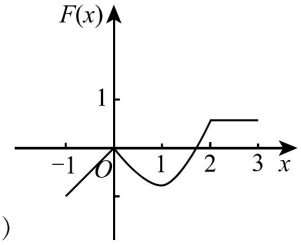
(B)



(C)



(D)



(4) 设有两个数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$, 若 $\lim a_n = 0$, 则_____

A. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.　　B. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 发散.

C. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛.　　D. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 发散.

(5) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 3 维向量空间 $\mathbf{R}^3$ 的一组基, 则由基 $\alpha_1, \dfrac{1}{2}\alpha_2, \dfrac{1}{3}\alpha_3$ 到基 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 的过渡矩阵为_____

A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

(6) 设 A, B 均为 2 阶矩阵, A^*, B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵, 若 $|A| = 2, |B| = 3$, 则分块矩阵 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为 _____

A. $\begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{pmatrix}$

(7) 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = 0.3\Phi(x) + 0.7\Phi\left(\dfrac{x-1}{2}\right)$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数, 则 $E(X) =$_____

A. 0　　B. 0.3　　C. 0.7　　D. 1

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 X 服从标准正态分布 $N(0,1), Y$ 的概率分布为 $P\{Y=0\} = P\{Y=1\} = \dfrac{1}{2}$ 记 $F_Z(z)$ 为随机变量 $Z = XY$ 的分布函数, 则函数 $F_Z(z)$ 的间断点个数为_____

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

二、填空题

(9) 设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数, $z = f(x, xy)$, 则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$_____.

(10) 若二阶常系数线性齐次微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)\,\mathrm{e}^x$, 则非齐次方程 $y'' + ay' + by = x$ 满足条件 $y(0) = 2, y'(0) = 0$ 的解为 $y =$_____

(11) 已知曲线 $L: y = x^2 (0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2})$, 则 $\displaystyle\int_L x \,\mathrm{d}s =$_____

(12) 设 $\Omega = \left\{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\right\}$, 则 $\displaystyle\iiint_\Omega z^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z =$_____

(13) 若 3 维列向量 α, β 满足 $\alpha^{\mathrm{T}}\beta = 2$, 其中 α^{T} 为 α 的转置, 则矩阵 $\beta\alpha^{\mathrm{T}}$ 的非零特征值为_____

(14) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 为来自二项分布总体 $B(n,p)$ 的简单随机样本, $\overline{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差, 若 $\overline{X} + kS^2$ 为 np^2 的无偏估计量, 则 $k =$_____

三、解答题

(15) 求二元函数 $f(x,y) = x^2\left(2 + y^2\right) + y\ln y$ 的极值.

(16) 设 a_n 为曲线 $y = x^n$ 与 $y = x^{n+1} (n = 1, 2, \cdots)$ 所围成区域的面积, 记 $S_1 = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n, S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$, 求 S_1 与 S_2 的值.

(17) 椭球面 S_1 是椭圆 $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$ 绕 x 轴旋转而成, 圆锥面 S_2 是由过点 $(4,0)$ 且与椭圆 $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$ 相切的直线绕 x 轴旋转而成.

(I) 求 S_1 及 S_2 的方程;

(II) 求 S_1 与 S_2 之间的立体的体积.

(18) (I) 证明拉格朗日中值定理: 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 则存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

(II) 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 在 $(0,\delta)(\delta>0)$ 内可导, , $\lim\limits_{x\to 0'}f'(x)=A$, 则 $f'_+(0)$ 存在, 且 $f'_+(0)=A$

(19) 计算曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, 其中 Σ 是曲面 $2x^2+2y^2+z^2=4$ 的外侧.

(20) 设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix}$, $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$

(I) 求满足 $A\xi_2=\xi_1, A^2\xi_3=\xi_1$ 的所有向量 ξ_2,ξ_3;

(II) 对 (I) 中的任意向量 ξ_2,ξ_3, 证明 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关.

(21) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$.

(I) 求二次型 f 的矩阵的所有特征值;

(II) 若二次型 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$, 求 a 的值.

(22) 袋中有 1 个红球、2 个黑球与 3 个白球. 现有放回地从袋中取两次, 每次取一个球. 以 X,Y,Z 分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数.

(I) 求 $P\{X=1\mid Z=0\}$;

(II) 求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布.

(23) 设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\lambda^2x\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 自总体 X 的简单随机样本.

(I) 求参数 λ 的矩估计量;

(II) 求参数 λ 的最大似然估计量.

参考答案

一、选择题

(1) A.　(2) A.　(3) D　(4) C.　(5) A.　(6) B.　(7) C.　(8) B.

二、填空题

(9) $xf''_{12}+f'_2+xyf''_{22}$　(10) $-x\mathrm{e}^x+x+2$　(11) $\dfrac{13}{6}$.　(12) $\dfrac{4}{15}\pi$　(13) 2　(14) -1.

三、解答题

(15) 极小值 $f\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

(16) $S_1=\dfrac{1}{2},S_2=1-\ln 2$

(17) (I) 椭球面 S_1 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2+z^2}{3}=1$, 圆锥面 S_2 的方程为 $y^2+z^2=\dfrac{1}{4}(x-4)^2$;

(II) $V=\pi$.

(18) 证明略.

(19) $I=4\pi$.

(20) (I) $\xi_2=\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0\right)^{\mathrm{T}}+c\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},1\right)^{\mathrm{T}}$, 或 $\xi_2=\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}c,\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}c,c\right)^{\mathrm{T}}$, c 为任意常数.

$\xi_3=\left(-\dfrac{1}{2},0,0\right)^{\mathrm{T}}+c_1(-1,1,0)^{\mathrm{T}}+c_2(0,0,1)^{\mathrm{T}}$, 或$\xi_3=\left(-\dfrac{1}{2}-c_1,c_1,c_2\right)^{\mathrm{T}}$, c_1,c_2 为任意常数.

(II) 证明略.

(21) (I) $\lambda_1=a,\lambda_2=a+1,\lambda_3=a-2$; (II) $a=2$.

(22) (I) $P\{X=1\mid Z=0\}=\dfrac{4}{9}$;

(II) 二维随机变量 (X,Y) 的概率分布为

Y \ X	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	0
2	$\frac{1}{9}$	0	0

(23) (I) λ 的矩估计量为 $\hat{\lambda}=\dfrac{2}{\overline{X}}$; (II)$\lambda$ 的最大似然估计量为 $\hat{\lambda}=\dfrac{2}{\overline{X}}$.