2004 年全国硕士研究生招生考试

一、填空题

(1) 曲线 $y=\ln x$ 上与直线 $x+y=1$ 垂直的切线方程为_____.

(2) 已知 $f'(\mathrm{e}^x)=x\mathrm{e}^{-x}$, 且 $f(1)=0$, 则 $f(x)=$_____

(3) 设 L 为正向圆周 $x^2+y^2=2$ 在第一象限中的部分, 则曲线积分 $\int_L x\,\mathrm{d}y-2y\,\mathrm{d}x$ 的值为_____

(4) 欧拉方程 $x^2\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+4x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=0(x>0)$ 的通解为_____

(5) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, 矩阵 B 满足 $ABA^*=2BA^*+E$, 其中 A^* 为 A 的伴随矩阵, E 是单位矩阵, 则 $|B|=$_____

(6) 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布, 则 $P\{X>\sqrt{D(X)}\}=$_____

二、选择题

(7) 把 $x\to0^+$ 时的无穷小量 $\alpha=\int_0^x\cos t^2\,\mathrm{d}t,\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,\mathrm{d}t,\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\,\mathrm{d}t$ 排列起来, 使排在后面的是前一个的高阶无穷小量, 则正确的排列次序是_____

A. α,β,γ　　B. α,γ,β.　　C. β,α,γ　　D. β,γ,α

(8) 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f'(0)>0$, 则存在 $\delta>0$, 使得_____

A. $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调增加.　　B. $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调减少.

C. 对任意的 $x\in(0,\delta)$, 有 $f(x)>f(0)$　　D. 对任意的 $x\in(-\delta,0)$, 有 $f(x)>f(0)$

(9) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数. 下列结论中正确的是_____

A. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

B. 若存在非零常数 λ, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=\lambda$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

C. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2a_n=0$

D. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, 则存在非零常数 λ, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=\lambda$

(10) 设 $f(x)$ 为连续函数 $F(t)=\int_1^t\mathrm{d}y\int_y^t f(x)\mathrm{d}x$, 则 $F'(2)$ 等于_____

A. $2f(2)$　　B. $f(2)$　　C. $-f(2)$　　D. 0

(11) 设 A 是 3 阶方阵, 将 A 的第 1 列与第 2 列交换得 B, 再把 B 的第 2 列加到第 3 列得 C, 则满足 $AQ=C$ 的可逆矩阵 Q 为_____

A. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　C. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(12) 设 A, B 为满足 $AB=O$ 的任意两个非零矩阵, 则必有_____

A. A 的列向量组线性相关, B 的行向量组线性相关.

B. A 的列向量组线性相关, B 的列向量组线性相关.

C. A 的行向量组线性相关, B 的行向量组线性相关.

D. A 的行向量组线性相关, B 的列向量组线性相关.

(13) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$, 对给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$, 数 u_α 满足 $P\{X>u_\alpha\}=\alpha$. 若 $P\{|X|<x\}=\alpha$, 则 x 等于_____

A. $u_{\frac{\alpha}{2}}$　　B. $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$　　C. $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$　　D. $u_{1-\alpha}$

(14) 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n (n>1)$ 独立同分布, 且其方差为 $\sigma^2>0$. 令 $Y=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, 则_____

A. $\operatorname{Cov}(X_1, Y)=\dfrac{\sigma^2}{n}$　　B. $\operatorname{Cov}(X_1, Y)=\sigma^2$

C. $D(X_1+Y)=\dfrac{n+2}{n}\sigma^2$　　D. $D(X_1-Y)=\dfrac{n+1}{n}\sigma^2$

三、解答题

(15) 设 $\mathrm{e}<a<b<\mathrm{e}^2$, 证明 $\ln^2 b-\ln^2 a>\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}(b-a)$

(16) 某种飞机在机场降落时, 为了减少滑行距离, 在触地的瞬间, 飞机尾部张开减速伞, 以增大阻力, 使飞机迅速减速并停下. 现有一质量为 9000 kg 的飞机, 着陆时的水平速度为 700 km/h. 经测试, 减速伞打开后, 飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比 (比例系数为 $k=6.0\times10^6$). 问从着陆点算起, 飞机滑行的最长距离是多少?

(17) 计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma} 2x^3\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3\left(z^2-1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 Σ 是曲面 $z=1-x^2-y^2(z\geqslant 0)$ 的上侧.

(18) 设有方程 $x^n+nx-1=0$, 其中 n 为正整数. 证明此方程存在唯一正实根 x_n, 并证明当 $\alpha>1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^{\alpha}$ 收敛.

(19) 设 $z=z(x,y)$ 是由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数, 求 $z=z(x,y)$ 的极值点和极值.

(20) 设有齐次线性方程组

$$\begin{cases} (1+a)x_1+x_2+\cdots+x_n=0, \\ 2x_1+(2+a)x_2+\cdots+2x_n=0, \\ \cdots\cdots \\ nx_1+nx_2+\cdots+(n+a)x_n=0, \end{cases} \qquad (n\geqslant 2)$$

试问 a 取何值时, 该方程组有非零解, 并求出其通解.

(21) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & a & 5 \end{pmatrix}$ 的特征方程有一个二重根, 求 a 的值, 并讨论 A 是否可相似对角化.

(22) 设 A,B 为随机事件, 且 $P(A)=\dfrac{1}{4},\ P(B\mid A)=\dfrac{1}{3},\ P(A\mid B)=\dfrac{1}{2}$, 令

$$X=\begin{cases} 1, & A \text{ 发生}, \\ 0, & A \text{ 不发生} \end{cases} \qquad Y=\begin{cases} 1, & B \text{ 发生}, \\ 0, & B \text{ 不发生}. \end{cases}$$

(I) 求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布;

(II) 求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}

(23) 设总体 X 的分布函数为

$$F(x;\beta)=\begin{cases} 1-\dfrac{1}{x^{\beta}}, & x>1, \\ 0, & x\leqslant 1, \end{cases}$$

其中未知参数 $\beta>1, X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 求:

(I) β 的矩估计量;

(II) β 的最大似然估计量.

参考答案

一、填空题

(1) $y = x - 1$. (2) $\frac{1}{2}(\ln x)^2$. (3) $\frac{3}{2}\pi$ (4) $y = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2}$, 其中 C_1, C_2 为任意常数.

(5) $\frac{1}{9}$. (6) $\frac{1}{\mathrm{e}}$.

二、选择题

(7) B. (8) C. (9) B. (10) B. (11) D. (12) A. (13) C. (14) A.

三、解答题

(15) 证明略. (16) 1.05 km. (17) $-\pi$ (18) 证明略.

(19) 点 $(9,3)$ 为极小值点, 极小值为 3 , 点 $(-9,-3)$ 为极大值点, 极大值为 -3.

(20) 当 $a=0$ 时, 方程组的通解为

$$x = k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \cdots + k_{n-1}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

当 $a = -\frac{n(n+1)}{2}$ 时, 方程组的通解为 $k\begin{pmatrix}1\\2\\3\\\vdots\\n\end{pmatrix}$

(21) $a=-2$ 或 $a=-\frac{2}{3}$. 当 $a=-2$ 时, A 可相似对角化, 当 $a=-\frac{2}{3}$ 时, A 不可相似对角化.

(22) (I)

X \ Y	0	1
0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

(II) $\frac{\sqrt{15}}{15}$.

(23) (I) β 的矩估计量为 $\hat{\beta} = \frac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$.

(II) β 的最大似然估计量 $\hat{\beta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$.