2002 年全国硕士研究生招生考试

一、填空题

(1) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x} =$_____.

(2) 已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^y+6xy+x^2-1=0$ 确定, 则 $y''(0)=$_____

(3) 微分方程 $yy''+(y')^2=0$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$ 的特解是_____

(4) 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 经正交变换 $x=Py$ 可化成标准形 $f=6y_1^2$, 则 $a=$_____

(5) 设随机变量 X 服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)(\sigma>0)$, 且二次方程 $y^2+4y+X=0$ 无实根的概率为 $\dfrac{1}{2}$, 则 $\mu=$_____

二、选择题

(6) 考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面 4 条性质:

① $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续;

② $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数连续;

③ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微;

④ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数存在.

若用 "$P\Rightarrow Q$" 表示可由性质 P 推出性质 Q, 则有_____

A. ② ⇒ ③ ⇒ ①　　B. ③ ⇒ ② ⇒ ①

C. ③ ⇒ ④ ⇒ ①　　D. ③ ⇒ ① ⇒ ④

(7) 设 $u_n\neq 0(n=1,2,3,\cdots)$, 且 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$, 则级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$_____

A. 发散.　　B. 绝对收敛.

C. 条件收敛.　　D. 收敛性根据所给条件不能判定.

(8) 设函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有界且可导, 则 _____

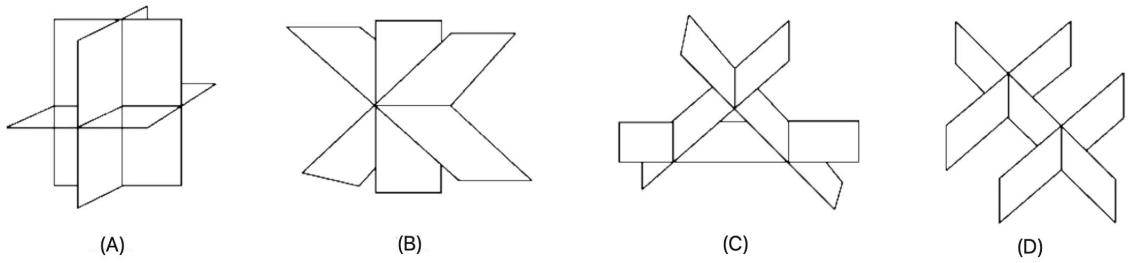
A. 当 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$ 时, 必有 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0$

B. 当 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在时, 必有 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0$

C. 当 $\displaystyle\lim_{x\to0^+}f(x)=0$ 时, 必有 $\displaystyle\lim_{x\to0^+}f'(x)=0$

D. 当 $\displaystyle\lim_{x\to0^+}f'(x)$ 存在时, 必有 $\displaystyle\lim_{x\to0^+}f'(x)=0$

(9) 设有三张不同平面的方程 $a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}z=b_i, i=1,2,3$, 它们所组成的线性方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩都为 2 , 则这三张平面可能的位置关系为_____



(10) 设 X_1 和 X_2 是任意两个相互独立的连续型随机变量, 它们的概率密度分别为 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$, 分布函数分别为 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$, 则_____

A. $f_1(x)+f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度.

B. $f_1(x)f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度.

C. $F_1(x)+F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.

D. $F_1(x)F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.

三、解答题

(11) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有一阶连续导数, 且 $f(0)\neq 0, f'(0)\neq 0$, 若 $af(h)+bf(2h)-f(0)$ 在 $h\to 0$ 时是比 h 高阶的无穷小, 试确定 a,b 的值.

(12) 已知两曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\int_0^{\arctan x}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ 在点 $(0,0)$ 处的切线相同, 写出此切线方程, 并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} nf\left(\dfrac{2}{n}\right)$

(13) 计算二重积分 $\iint_D e^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$

(14) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有一阶连续导数,L 是上半平面 $(y>0)$ 内的有向分段光滑曲线, 其起点为 (a,b), 终点为 (c,d) 记

$$I=\int_L \frac{1}{y}\left[1+y^2f(xy)\right]\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}\left[y^2f(xy)-1\right]\mathrm{d}y$$

(1) 证明曲线积分 I 与路径 L 无关;

(2) 当 $ab=cd$ 时, 求 I 的值.

(15) (1) 验证函数 $y(x)=1+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^6}{6!}+\dfrac{x^9}{9!}+\cdots+\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$ 满足微分方程 $y''+y'+y=\mathrm{e}^x$;

(2) 利用 (1) 的结果求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数.

(16) 设有一小山, 取它的底面所在的平面为 xOy 坐标面, 其底部所占的区域为 $D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2-xy\leqslant 75\right\}$, 小山的高度函数为 $h(x,y)=75-x^2-y^2+xy$

(1) 设 $M(x_0, y_0)$ 为区域 D 上一点, 问 $h(x, y)$ 在该点沿平面上什么方向的方向导数最大? 若记此方向导数的最大值为 $g(x_0, y_0)$, 试写出 $g(x_0, y_0)$ 的表达式.

(2) 现欲利用此小山开展攀岩活动, 为此需要在山脚寻找一上山坡度最大的点作为攀登的起点. 也就是说, 要在 D 的边界线 $x^2 + y^2 - xy = 75$ 上找出使 (1) 中的 $g(x, y)$ 达到最大值的点. 试确定攀登起点的位置.

(17) 已知 4 阶方阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 均为 4 维列向量, 其中 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$. 如果 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, 求线性方程组 $Ax = \beta$ 的通解.

(18) 设 A, B 为同阶方阵,

(1) 如果 A, B 相似, 试证 A, B 的特征多项式相等.

(2) 举一个 2 阶方阵的例子说明 (1) 的逆命题不成立.

(3) 当 A, B 均为实对称矩阵时, 试证 (1) 的逆命题成立.

(19) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}, & 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$, 对 X 独立地重复观察 4 次, 用 Y 表示观察值大于 $\dfrac{\pi}{3}$ 的次数, 求 Y^2 的数学期望.

(20) 设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 $\theta\left(0 < \theta < \dfrac{1}{2}\right)$ 是未知参数, 利用总体 X 的如下样本值

$$3, 1, 3, 0, 3, 1, 2, 3,$$

求 θ 的矩估计值和最大似然估计值.

参考答案

一、填空题

(1) 1.　(2) -2　(3) $y=\sqrt{x+1}$　(4) 2　(5) 4 .

二、选择题

(6) A.　(7) C.　(8) B.　(9) B.　(10) D.

三、解答题

(11) $a=2, b=-1$.

(12) 2.

(13) $e-1$.

(14) (1) 证明略.

(2) $\dfrac{c}{d}-\dfrac{a}{b}$.

(15) (1) 证明略.

(2) $y(x)=\dfrac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{x}(-\infty<x<+\infty)$.

(16) (1) 当函数 $h(x,y)$ 以及点 $M\left(x_0,y_0\right)$ 给定时, $h(x,y)$ 在点 M 处的各个方向的方向导数的最大值为 $g\left(x_0,y_0\right)=\sqrt{5x_0^2+5y_0^2-8x_0y_0}$.

(2) 点 $M_1(5,-5)$ 或点 $M_2(-5,5)$ 可作为攀登的起点.

(17) $x=(0,3,0,1)^{\mathrm{T}}+k(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}$, 其中 k 为任意常数.

(18) (1) 证明略.

(2) $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

(3) 证明略.

(19) 5

(20) θ 的矩估计值为 $\dfrac{1}{4}$, θ 的极大似然估计值为 $\dfrac{1}{12}(7-\sqrt{13})$.