

2000 年全国硕士研究生招生考试

一、填空题

(1) $\int_0^1 \sqrt{2x - x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 曲面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ 在点 $(1, -2, 2)$ 处的法线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 微分方程 $xy'' + 3y' = 0$ 的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(4) 已知方程组 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ 无解, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

(5) 设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为 $\frac{1}{9}$, A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等, 则 $P(A) = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、选择题

(6) 设 $f(x), g(x)$ 是恒大于零的可导函数, 且 $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) < 0$, 则当 $a < x < b$ 时, 有 $\underline{\hspace{2cm}}$

A. $f(x)g(b) > f(b)g(x)$ B. $f(x)g(a) > f(a)g(x)$

C. $f(x)g(x) > f(b)g(b)$ D. $f(x)g(x) > f(a)g(a)$

(7) 设 $S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (z \geq 0)$, S_1 为 S 在第一卦限中的部分, 则有 $\underline{\hspace{2cm}}$

A. $\iint_S x \, dS = 4 \iint_{S_1} x \, dS$ B. $\iint_S y \, dS = 4 \iint_{S_1} x \, dS$

C. $\iint_S z \, dS = 4 \iint_{S_1} x \, dS$ D. $\iint_S xyz \, dS = 4 \iint_{S_1} xyz \, dS$

(8) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则必收敛的级数为 $\underline{\hspace{2cm}}$

A. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{u_n}{n}$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$

C. $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$ D. $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1})$

(9) 设 n 维列向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_m (m < n)$ 线性无关, 则 n 维列向量组 β_1, \dots, β_m 线性无关的充分必要条件为 $\underline{\hspace{2cm}}$

A. 向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 可由向量组 β_1, \dots, β_m 线性表示.

B. 向量组 β_1, \dots, β_m 可由向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性表示.

C. 向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 与向量组 β_1, \dots, β_m 等价.

D. 矩阵 $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ 与矩阵 $B = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ 等价.

(10) 设二维随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布, 则随机变量 $\xi = X + Y$ 与 $\eta = X - Y$ 不相关的充分必要条件为_____

- A. $E(X) = E(Y)$
- B. $E(X^2) - [E(X)]^2 = E(Y^2) - [E(Y)]^2$
- C. $E(X^2) = E(Y^2)$
- D. $E(X^2) + [E(X)]^2 = E(Y^2) + [E(Y)]^2$

三、解答题

(11) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right)$

(12) 设 $z = f\left(xy, \frac{x}{y}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, g 具有二阶连续导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

(13) 计算曲线积分 $I = \oint_L \frac{x \, dy - y \, dx}{4x^2 + y^2}$, 其中 L 是以点 $(1, 0)$ 为中心, R 为半径的圆周 ($R > 1$), 取逆时针方向.

(14) 设对于半空间 $x > 0$ 内任意的光滑有向封闭曲面 S , 都有

$$\iint_S xf(x) \, dy \, dz - xyf(x) \, dz \, dx - e^{2x}z \, dx \, dy = 0$$

其中函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内具有连续的一阶导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ 求 $f(x)$

(15) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + (-2)^n} \frac{x^n}{n}$ 的收敛区间, 并讨论该区间端点处的收敛性.

(16) 设有一半径为 R 的球体, P_0 是此球的表面上的一个定点, 球体上任一点的密度与该点到 P_0 距离的平方成正比 (比例常数 $k > 0$), 求球体的重心位置.

(17) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续, 且 $\int_0^\pi f(x) \, dx = 0, \int_0^\pi f(x) \cos x \, dx = 0$. 试证: 在 $(0, \pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1, ξ_2 , 使 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$

(18) 设矩阵 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, 且 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$, 其中 E 为 4 阶单位矩阵, 求矩阵 B .

(19) 某试验性生产线每年一月份进行熟练工与非熟练工的人数统计, 然后将 $\frac{1}{6}$ 熟练工支援其他生产部门, 其缺额由招收新的非熟练工补齐. 新、老非熟练工经过培训及实践至年终考核有 $\frac{2}{5}$ 成为熟练工. 设第 n 年一月份统计的熟练工和非熟练工所占百分比分别为 x_n 和 y_n , 记成向量 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$

(I) 求 $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ 的关系式并写成矩阵形式: $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$;

(II) 验证 $\eta_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\eta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是 A 的两个线性无关的特征向量, 并求出相应的特征值;

(III) 当 $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 时, 求 $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$

(20) 某流水生产线上每个产品不合格的概率为 $p(0 < p < 1)$, 各产品合格与否相互独立, 当出现一个不合格产品时即停机检修. 设开机后第一次停机时已生产了的产品个数为 X . 求 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$

(21) 设某种元件的使用寿命 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} 2e^{-2(x-\theta)}, & x \geq \theta, \\ 0, & x < \theta, \end{cases}$$

其中 $\theta > 0$ 为未知参数. 又设 x_1, x_2, \dots, x_n 是 X 的一组样本观测值, 求参数 θ 的最大似然估计值.

参考答案

一、填空题

$$(1) \frac{\pi}{4} \quad (2) \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-2}{6} \quad (3) y = C_1 + \frac{C_2}{x^2} \quad (4) -1 \quad (5) \frac{2}{3}.$$

二、选择题

$$(6) A \quad (7) C \quad (8) D \quad (9) D \quad (10) B$$

三、解答题

$$(11) 1 \quad (12) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f'_1 - \frac{1}{y^2} f'_2 + xy f''_{11} - \frac{x}{y^3} f''_{22} - \frac{1}{x^2} g' - \frac{y}{x^3} g''.$$

$$(13) \pi \quad (14) f(x) = \frac{e^x}{x} (e^x - 1).$$

(15) 收敛区间为 $(-3, 3)$. 当 $x = 3$ 时, 原级数发散, 当 $x = -3$ 时, 原级数收敛.

$$(16) \left(-\frac{R}{4}, 0, 0 \right).$$

(17) 证明略. (可考虑函数 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, 对 $F(x)$ 使用罗尔定理.)

$$(18) \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(19) (I) \text{ 关系式为 } \begin{cases} x_{n+1} = \frac{9}{10}x_n + \frac{2}{5}y_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{10}x_n + \frac{3}{5}y_n, \end{cases} \text{ 矩阵形式为 } \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

$$(II) \lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} \quad (III) \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 8 - 3 \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 2 + 3 \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

$$(20) E(X) = \frac{1}{p}, D(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

$$(21) \hat{\theta} = \min \{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$