# 1999 年全国硕士研究生招生考试

## 一、填空题

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)=$_____

(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_0^x \sin(x-t)^2\,\mathrm{d}t=$_____

(3) $y''-4y=\mathrm{e}^{2x}$ 的通解为 $y=$_____

(4) 设 $n$ 阶矩阵 $A$ 的元素全为 1 , 则 $A$ 的 $n$ 个特征值是_____

(5) 设两两相互独立的三事件 $A,B$ 和 $C$ 满足条件 : $ABC=\varnothing, P(A)=P(B)=P(C)<\dfrac{1}{2}$, 且已知 $P(A\cup B\cup C)=\dfrac{9}{16}$, 则 $P(A)=$_____

## 二、选择题

(6) 设 $f(x)$ 是连续函数, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数, 则_____

A. 当 $f(x)$ 是奇函数时, $F(x)$ 必是偶函数.

B. 当 $f(x)$ 是偶函数时, $F(x)$ 必是奇函数.

C. 当 $f(x)$ 是周期函数时, $F(x)$ 必是周期函数.

D. 当 $f(x)$ 是单调增函数时, $F(x)$ 必是单调增函数.

(7) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0\\ x^2g(x), & x\leqslant 0\end{cases}$ 其中 $g(x)$ 是有界函数, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处_____

A. 极限不存在.

B. 极限存在, 但不连续.

C. 连续, 但不可导.

D. 可导.

(8) 设 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{2},\\ 2-2x, & \dfrac{1}{2}<x<1,\end{cases}$ $S(x)=\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x, -\infty<x<+\infty$, 其中 $a_n=2\displaystyle\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\,\mathrm{d}x, (n=0,1,2,\cdots)$, 则 $S\left(-\dfrac{5}{2}\right)$ 等于_____

A. $\dfrac{1}{2}$.

B. $-\dfrac{1}{2}$.

C. $\dfrac{3}{4}$.

D. $-\dfrac{3}{4}$.

(9) 设 $A$ 是 $m\times n$ 矩阵, $B$ 是 $n\times m$ 矩阵, 则 _____

A. 当 $m>n$ 时, 必有行列式 $|AB|\neq 0$.

B. 当 $m>n$ 时, 必有行列式 $|AB|=0$.

C. 当 $n>m$ 时, 必有行列式 $|AB|\neq 0$.

D. 当 $n>m$ 时, 必有行列式 $|AB|=0$.

(10) 设两个相互独立的随机变量 $X$ 和 $Y$ 分别服从正态分布 $N(0,1)$ 和 $N(1,1)$, 则_____

A. $P\{X+Y\leqslant 0\}=\dfrac{1}{2}$.

B. $P\{X+Y\leqslant 1\}=\dfrac{1}{2}$.

C. $P\{X-Y\leqslant 0\}=\dfrac{1}{2}$.

D. $P\{X-Y\leqslant 1\}=\dfrac{1}{2}$.

## 三、解答题

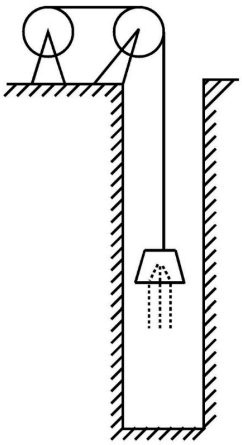
(11) 设 $y=y(x), z=z(x)$ 是由方程 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 所确定的函数, 其中 $f$ 和 $F$ 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数, 求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

(12) 求 $I=\displaystyle\int_L [\mathrm{e}^x\sin y-b(x+y)]\,\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-ax)\,\mathrm{d}y$, 其中 $a,b$ 为正的常数,$L$ 为从点 $A(2a,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 到点 $O(0,0)$ 的弧.

(13) 设函数 $y(x)(x\geqslant 0)$ 二阶可导且 $y'(x)>0, y(0)=1$. 过曲线 $y=y(x)$ 上任意一点 $P(x,y)$ 作该曲线的切线及 $x$ 轴的垂线, 上述两直线与 $x$ 轴所围成的三角形的面积记为 $S_1$, 区间 $[0,x]$ 上以 $y=y(x)$ 为曲边的曲边梯形面积记为 $S_2$, 并设 $2S_1-S_2$ 恒为 1 , 求此曲线 $y=y(x)$ 的方程.

(14) 试证: 当 $x>0$ 时, $\left(x^2-1\right)\ln x\geqslant (x-1)^2$.

(15) 为清除井底的污泥, 用缆绳将抓斗放人井底, 抓起污泥后提出井口 (如图). 已知井深 30 m, 抓斗自重 400 N, 缆绳每米重 50 N, 抓斗抓起的污泥重 2000 N, 提升速度为 3 m/s, 在提升过程中, 污泥以 20 N/s 的速率从抓斗缝隙中漏掉. 现将抓起污泥的抓斗提升至井口, 问克服重力需作多少焦耳的功?
(说明: (1) $1\ \mathrm{N}\times 1\ \mathrm{m}=1\ \mathrm{J}$; m, N, s, J 分别表示米, 牛顿, 秒, 焦耳. (2) 抓斗的高度及位于井口上方的缆绳长度忽略不计.)



(16) 设 $S$ 为椭球面 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}+z^2=1$ 的上半部分, 点 $P(x,y,z)\in S, \pi$ 为 $S$ 在点 $P$ 处的切平面, $\rho(x,y,z)$ 为点 $O(0,0,0)$ 到平面 $\pi$ 的距离, 求 $\displaystyle\iint_S \frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S$.

(17) 设 $a_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\ \mathrm{d}x$,

(1) 求 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(a_n+a_{n+2}\right)$ 的值;

(2) 试证: 对任意的常数 $\lambda>0$, 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛.

(18) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix}$, 其行列式 $|A|=-1$, 又 $A$ 的伴随矩阵 $A^*$ 有一个特征值 $\lambda_0$, 属于 $\lambda_0$ 的一个特征向量为 $\alpha=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$, 求 $a,b,c$ 和 $\lambda_0$ 的值.

(19) 设 $A$ 为 $m$ 阶实对称矩阵且正定, $B$ 为 $m\times n$ 实矩阵, $B^{\mathrm{T}}$ 为 $B$ 的转置矩阵, 试证 : $B^{\mathrm{T}}AB$ 为正定矩阵的充分必要条件是 $B$ 的秩 $r(B)=n$.

(20) 设随机变量 $X$ 与 $Y$ 相互独立, 下表列出了二维随机变量 $(X,Y)$ 的联合分布律及关于 $X$ 和关于 $Y$ 的边缘分布律中的部分数值, 试将其余数值填人表中的空白处.

| X \ Y | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $P\{X=x_i\}=p_{i\cdot}$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | | $\frac{1}{8}$ | | |
| $x_2$ | $\frac{1}{8}$ | | | |
| $P\{Y=y_j\}=p_{\cdot j}$ | $\frac{1}{6}$ | | | 1 |

(21) 设总体 $X$ 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{6x}{\theta^3}(\theta-x), & 0<x<\theta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体 $X$ 的简单随机样本.

(1) 求 $\theta$ 的矩估计量 $\hat{\theta}$;

(2) 求 $\hat{\theta}$ 的方差 $D(\hat{\theta})$.

# 参考答案

## 一、填空题

(1) $\dfrac{1}{3}$　　(2) $\sin x^2$　　(3) $y = C_1 e^{-2x} + \left(C_2 + \dfrac{1}{4}x\right) e^{2x}$, 其中 $C_1, C_2$ 为任意常数.

(4) $n, 0(n-1\text{重})$　　(5) $\dfrac{1}{4}$

## 二、选择题

(6) A　　(7) D　　(8) C　　(9) B　　(10) B

## 三、解答题

(11) $\dfrac{(f + xf')\,F'_y - xf'F'_x}{F'_y + xf'F'_z}$

(12) $\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\right) a^2 b - \dfrac{\pi}{2} a^3$

(13) $y = e^x$　　(14) 略　　(15) 91500 J

(16) $\dfrac{3\pi}{2}$　　(17) (1)1　　(2) 略

(18) $a = 2, b = -3, c = 2, \lambda_0 = 1$　　(19) 略

(20)

| X \ Y | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $P\{X=x_i\}=p_{i\cdot}$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{4}$ |
| $x_2$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{4}$ |
| $P\{Y=y_j\}=p_{\cdot j}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | 1 |

(21) (1)$2\overline{X}$　　(2)$\dfrac{\theta^2}{5n}$