1998 年全国硕士研究生招生考试

一、填空题

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$_____

(2) 设 $z=\dfrac{1}{x}f(xy)+y\varphi(x+y), f,\varphi$ 具有二阶连续导数, 则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$_____

(3) 设 l 为椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$, 其周长记为 a, 则 $\oint_l\left(2xy+3x^2+4y^2\right)\mathrm{d}s=$_____

(4) 设 A 为 n 阶矩阵, $|A|\neq 0, A^*$ 为 A 的伴随矩阵, E 为 n 阶单位矩阵. 若 A 有特征值 λ, 则 $(A^*)^2+E$ 必有特征值_____

(5) 设平面区域 D 由曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 及直线 $y=0, x=1, x=\mathrm{e}^2$ 所围成, 二维随机变量 (X,Y) 在区域 D 上服从均匀分布, 则 (X,Y) 关于 X 的边缘概率密度在 $x=2$ 处的值为_____

二、选择题

(6) 设 $f(x)$ 连续, 则 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_0^x tf\left(x^2-t^2\right)\mathrm{d}t=$_____

A. $xf\left(x^2\right)$.　　B. $-xf\left(x^2\right)$.

C. $2xf\left(x^2\right)$　　D. $-2xf\left(x^2\right)$.

(7) 函数 $f(x)=\left(x^2-x-2\right)\left|x^3-x\right|$ 不可导点的个数是_____

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

(8) 已知函数 $y=y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\dfrac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$, 且当 $\Delta x\to 0$ 时, α 是 Δx 的高阶无穷小, $y(0)=\pi$, 则 $y(1)$ 等于_____

A. 2π　　B. π　　C. $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$　　D. $\pi\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$

(9) 设矩阵 $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ 是满秩的, 则直线 $\dfrac{x-a_3}{a_1-a_2}=\dfrac{y-b_3}{b_1-b_2}=\dfrac{z-c_3}{c_1-c_2}$ 与直线 $\dfrac{x-a_1}{a_2-a_3}=\dfrac{y-b_1}{b_2-b_3}=\dfrac{z-c_1}{c_2-c_3}$_____

A. 相交于一点.　　B. 重合.　　C. 平行但不重合.　　D. 异面.

(10) 设 A,B 是两个随机事件, 且 $0<P(A)<1, P(B)>0, P(B\mid A)=P(B\mid\overline{A})$, 则必有_____

A. $P(A\mid B)=P(\overline{A}\mid B)$.　　B. $P(A\mid B)\neq P(\overline{A}\mid B)$.

C. $P(AB)=P(A)P(B)$.　　D. $P(AB)\neq P(A)P(B)$

三、解答题

(11) 求直线 $l: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ 在平面 $\pi: x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 l_0 的方程, 并求 l_0 绕 y 轴旋转一周所成曲面的方程.

(12) 确定常数 λ, 使在右半平面 $x>0$ 上的向量 $A(x,y)=2xy\left(x^4+y^2\right)^{\lambda} i-x^2\left(x^4+y^2\right)^{\lambda} j$ 为某二元函数 $u(x,y)$ 的梯度, 并求 $u(x,y)$.

(13) 从船上向海中沉放某种探测器, 按探测要求, 需确定仪器的下沉深度 y(从海平面算起) 与下沉速度 v 之间的函数关系. 设仪器在重力作用下, 从海平面由静止开始铅直下沉, 在下沉过程中还受到阻力和浮力的作用. 设仪器的质量为 m, 体积为 B, 海水比重为 ρ, 仪器所受的阻力与下沉速度成正比, 比例系数为 $k(k>0)$. 试建立 y 与 v 所满足的微分方程, 并求出函数关系式 $y=y(v)$. (注: 浮力 = 体积 × 比重)

(14) 计算 $\displaystyle\int_{\Sigma}\frac{ax\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z+(z+a)^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}$, 其中 Σ 为下半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧,a 为大于零的常数.

(15) 求 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right)$

(16) 设正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 且 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散, 试问级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$ 是否收敛? 并说明理由.

(17) 设 $y=f(x)$ 是区间 $[0,1]$ 上的任一非负连续函数.

(I) 试证存在 $x_0\in(0,1)$, 使得在区间 $[0,x_0]$ 上以 $f\left(x_0\right)$ 为高的矩形面积, 等于在区间 $[x_0,1]$ 上以 $y=f(x)$ 为曲边的梯形面积.

(II) 又设 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内可导, 且 $f'(x)>-\dfrac{2f(x)}{x}$, 证明 (I) 中的 x_0 是唯一的.

(18) 已知二次曲面方程 $x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz=4$ 可以经过正交变换 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}$ 化为椭圆柱面方程 $\eta^2+4\zeta^2=4$, 求 a,b 的值和正交矩阵 P.

(19) 设 A 是 n 阶矩阵, 若存在正整数 k, 使线性方程组 $A^k x=\mathbf{0}$ 有解向量 α, 且 $A^{k-1}\alpha\neq\mathbf{0}$. 证明: 向量组 $\alpha, A\alpha,\cdots,A^{k-1}\alpha$ 是线性无关的.

(20) 已知线性方程组

$$(\mathrm{I})\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1,2n}x_{2n}=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2,2n}x_{2n}=0 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{n,2n}x_{2n}=0 \end{cases}$$

的一个基础解系为 $(b_{11},b_{12},\cdots,b_{1,2n})^{\mathrm{T}},(b_{21},b_{22},\cdots,b_{2,2n})^{\mathrm{T}},\cdots,(b_{n1},b_{n2},\cdots,b_{n,2n})^{\mathrm{T}}$。试写出线性方程组

$$(\mathrm{II})\begin{cases} b_{11}y_1+b_{12}y_2+\cdots+b_{1,2n}y_{2n}=0 \\ b_{21}y_1+b_{22}y_2+\cdots+b_{2,2n}y_{2n}=0, \\ \cdots\cdots \\ b_{n1}y_1+b_{n2}y_2+\cdots+b_{n,2n}y_{2n}=0 \end{cases}$$

的通解, 并说明理由.

(21) 设两个随机变量 X,Y 相互独立, 且都服从均值为 0 , 方差为 $\dfrac{1}{2}$ 的正态分布, 求随机变量 $|X-Y|$ 的方差.

(22) 从正态总体 $N\left(3.4,6^2\right)$ 中抽取容量为 n 的样本, 如果要求其样本均值位于区间 $(1.4,5.4)$ 内的概率不小于 0.95, 问样本容量 n 至少应取多大?

附表: 标准正态分布表 $\Phi(z)=\displaystyle\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$

z	1. 28	1. 645	1. 96	2. 33
$\Phi(z)$	0. 900	0. 950	0. 975	0. 990

(23) 设某次考试的考生成绩服从正态分布, 从中随机地抽取 36 位考生的成绩, 算得平均成绩为 66.5 分, 标准差为 15 分. 问在显著性水平 0.05 下, 是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分? 并给出检验过程.

附表: t 分布表 $P\{t(n)\leqslant t_p(n)\}=p$

$t_p(n)$ \ p / n	0. 95	0. 975
35	1. 6896	2. 0301
36	1. 6883	2. 0281

参考答案

一、填空题

(1) $-\dfrac{1}{4}$　　(2) $yf''(xy)+\varphi'(x+y)+y\varphi''(x+y)$　　(3) $12a$　　(4) $\left(\dfrac{|A|}{\lambda}\right)^2+1$　　(5) $\dfrac{1}{4}$

二、选择题

(6) A　　(7) B　　(8) D　　(9) A　　(10) C

三、解答题

(11) $l_0:\begin{cases} x-y+2z-1=0 \\ x-3y-2z+1=0 \end{cases}$　　曲面：$4x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0.$

(12) $\lambda=-1$　　$u(x,y)=-\arctan\dfrac{y}{x^2}+C$

(13) $y=-\dfrac{m}{k}v-\dfrac{m(mg-B\rho)}{k^2}\ln\left(\dfrac{mg-B\rho-kv}{mg-B\rho}\right)$

(14) $-\dfrac{\pi}{2}a^3$　　(15) $\dfrac{2}{\pi}$　　(16) 略　　(17) 略

(18) $a=3,b=1$，$P=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$　　(19) 略

(20) $y=k_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1,2n} \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{2,2n} \end{pmatrix}+\ldots+k_n\begin{pmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ \vdots \\ a_{n,2n} \end{pmatrix}$, 其中 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 为任意常数.

(21) $D|X-Y|=1-\dfrac{2}{\pi}$　　(22) 35

(23) 略