1997 年全国硕士研究生招生考试

一、填空题

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$_____

(2) 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 3 , 则幕级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$ 的收敛区间为_____

(3) 对数螺线 $\rho=\mathrm{e}^{\theta}$ 在点 $(\rho,\theta)=\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 处的切线的直角坐标方程为_____

(4) 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{pmatrix}$, B 为 3 阶非零矩阵, 且 $AB=O$, 则 $t=$_____

(5) 袋中有 50 个乒乓球, 其中 20 个是黄球, 30 个是白球. 今有两人依次随机地从袋中各取一球, 取后不放回, 则第二人取得黄球的概率是_____

二、选择题

(6) 二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处_____

A. 连续, 偏导数存在.　　B. 连续, 偏导数不存在.

C. 不连续, 偏导数存在.　　D. 不连续, 偏导数不存在.

(7) 设在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)>0$, $f'(x)<0$, $f''(x)>0$。令 $S_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, $S_2=f(b)(b-a)$, $S_3=\dfrac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)$, 则 _____

A. $S_1<S_2<S_3$.　　B. $S_2<S_1<S_3$.

C. $S_3<S_1<S_2$.　　D. $S_2<S_3<S_1$.

(8) 设 $F(x)=\int_x^{x+2\pi}\mathrm{e}^{\sin t}\sin t\ \mathrm{d}t$, 则_____

A. 为正常数.　　B. 为负常数.　　C. 恒为零.　　D. 不为常数.

(9) 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$, 则三条直线 $a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$, $a_3x+b_3y+c_3=0$ (其中 $a_i^2+b_i^2\neq 0, i=1,2,3$) 交于一点的充要条件是_____

A. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关.　　B. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

C. 秩 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=$ 秩 $r(\alpha_1,\alpha_2)$.　　D. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关 , α_1,α_2 线性无关.

(10) 设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 的方差分别为 4 和 2 , 则随机变量 $3X-2Y$ 的方差是_____

A. 8　　B. 16　　C. 28　　D. 44

三、解答题

(11) 计算 $I=\iiint_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}v$, 其中 Ω 为平面曲线 $\begin{cases} y^2=2z \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周形成的曲面与平面 $z=8$ 所围成的区域.

(12) 计算曲线积分 $\oint_c (z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$, 其中 C 是曲线 $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x-y+z=2, \end{cases}$ 从 z 轴正向往 z 轴负向看, C 的方向是顺时针的.

(13) 在某一人群中推广新技术是通过其中已掌握新技术的人进行的. 设该人群的总人数为 N, 在 $t=0$ 时刻已掌握新技术的人数为 x_0, 在任意时刻 t 已掌握新技术的人数为 $x(t)$(将 $x(t)$ 视为连续可微变量) , 其变化率与已掌握新技术人数和末掌握新技术人数之积成正比, 比例常数 $k>0$, 求 $x(t)$.

(14) 设直线 $l:\begin{cases} x+y+b=0, \\ x+ay-z-3=0 \end{cases}$ 在平面 π 上, 而平面 π 与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切于点 $(1,-2,5)$, 求 a,b 之值.

(15) 设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数, 而 $z=f\left(\mathrm{e}^x\sin y\right)$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\mathrm{e}^{2x}z$, 求 $f(u)$.

(16) 设 $f(x)$ 连续, $\varphi(x)=\displaystyle\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$, 且 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$($A$ 为常数), 求 $\varphi'(x)$ 并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

(17) 设 $a_1=2, a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)(n=1,2,\cdots)$, 证明:

(I) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ 存在;

(II) 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ 收敛.

(18) 设 B 是秩为 2 的 5×4 矩阵 , $\alpha_1=(1,1,2,3)^{\mathrm{T}}, \alpha_2=(-1,1,4,-1)^{\mathrm{T}}, \alpha_3=(5,-1,-8,9)^{\mathrm{T}}$ 是齐次线性方程组 $Bx=\mathbf{0}$ 的解向量, 求 $Bx=\mathbf{0}$ 的解空间的一个标准正交基.

(19) 已知 $\xi=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}$ 的一个特征向量.

(I) 试确定参数 a,b 及特征向量 ξ 所对应的特征值;

(II) 问 A 能否相似于对角阵? 说明理由.

(20) 设 A 是 n 阶可逆方阵, 将 A 的第 i 行和第 j 行对换后得到的矩阵记为 B.

(I) 证明 B 可逆;

(II) 求 AB^{-1}.

(21) 从学校乘汽车到火车站的途中有 3 个交通岗, 假设在各个交通岗遇到红灯的事件是相互独立的, 并且概率都是 $\frac{2}{5}$. 设 X 为途中遇到红灯的次数, 求随机变量 X 的分布律、分布函数和数学期望.

(22) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 $\theta>-1$ 是末知参数, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个容量为 n 的简单随机样本, 分别用矩估计法和极大似然估计法求 θ 的估计量.

参考答案

一、填空题

(1) $\frac{3}{2}$　(2) $(-2,4)$　(3) $x+y=e^{\frac{\pi}{2}}$　(4) $t=-3$　(5) $\frac{2}{5}$

二、选择题

(6) C　(7) B　(8) A　(9) D　(10) D

三、解答题

(11) $\frac{1024\pi}{3}$　(12) -2π　(13) $x=\frac{Nx_0e^{kNt}}{N-x_0+x_0e^{kNt}}$　(14) $a=-5,b=-2$

(15) $f(u)=C_1e^u+C_2e^{-u}$, 其中 C_1 C_2 为任意常数.　(16) 略　(17) 略

(18) $\eta_1=\frac{1}{\sqrt{15}}[1,1,2,3]^T$,　$\eta_2=\frac{1}{\sqrt{39}}[-2,1,5,-3]^T$

(19) (I)$a=-3,b=0,\lambda=-1$　(II) 略

(20) (I) 略　(II)$AB^{-1}=A\cdot(E_{ij}A)^{-1}=AA^{-1}E_{ij}^{-1}=E_{ij}^{-1}=E_{ij}$

(21)

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{27}{125}, & 0\le x<1\\ \frac{81}{125}, & 1\le x<2\\ \frac{117}{125}, & 2\le x<3\\ 1, & x\ge 3\end{cases}$$

$X\sim B\left(3,\frac{2}{5}\right)$ 的数学期望为 $EX=np=3\cdot\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$.

(22) θ 的矩估计量为: $\hat{\theta}=\frac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$

θ 的最大似然估计量为: $\hat{\theta}=-1-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$